ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ
(TANGENT TO CIRCLE)

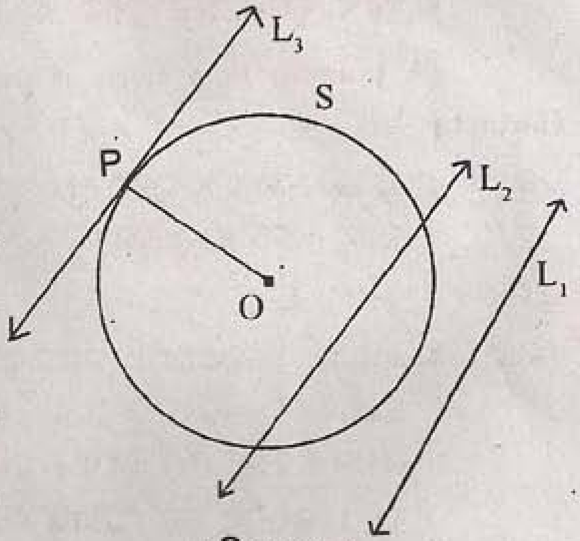
8.1. ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ :

ଆମେ ପୂର୍ବ ଆଲୋଚନାରୁ ଜାଣୁ ଯେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ନାହିଁ। ସୁତରାଂ ଏକ ସମତଳରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ରହିଲେ ତିନିଗୋଟି ସମ୍ଭାବନା ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ।

(i) ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଛେଦକରେ ନାହିଁ।

(ii) ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ। ଅର୍ଥାତ୍ ବୃତ୍ତ ଓ ସରଳରେଖାର ଏକମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ରହେ।

(iii) ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ।



[ଚିତ୍ର 8.1]

ଚିତ୍ର 8.1ରେ S ବୃତ୍ତଟି L_1 ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ଆଦୌ ଛେଦିତ ହେଉନାହିଁ, L_2 ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ L_3 ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦିତ ହେଉଅଛି।

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଏକ ସରଳରେଖା ଓ ଏକ ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ ସରଳରେଖାଟିକୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ **(tangent)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଛେଦବିନ୍ଦୁଟିକୁ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ **(Point of contact)** କୁହାଯାଏ।

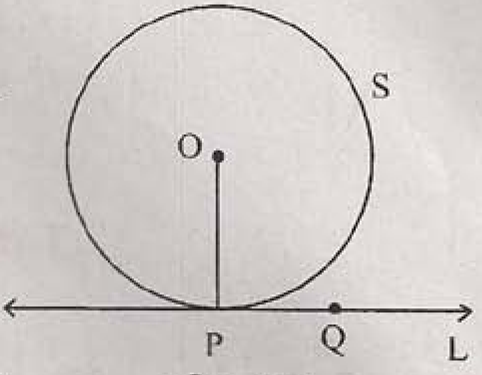
ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଏକ ସରଳରେଖା ଓ ଏକ ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ ସରଳରେଖାଟିକୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ **(Secant)** କୁହାଯାଏ।

ଚିତ୍ର 8.1ରେ L_2 ସରଳରେଖା S ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ ଏବଂ L_3 ସରଳରେଖା ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ। L_3 ଓ S ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ P ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଅଟେ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଏକ ସରଳରେଖା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ P ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ସରଳରେଖାଟି P ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତକୁ 'ଛେଦ'କରେ କହିବା ପରିବର୍ତ୍ତେ P ବିନ୍ଦୁରେ **ସ୍ପର୍ଶକରେ** (touches) ବୋଲି କୁହାଯାଏ।

ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ **ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ** ଅଟେ। ଚିତ୍ର 8.2ରେ L ସରଳରେଖାଟି S ବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଅଛି। ସୁତରାଂ $\overline{OP}$ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଅଟେ।

L ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ P ଭିନ୍ନ ଏକ ବିନ୍ଦୁ Q, ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ। ନଚେତ୍ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଅର୍ଥାତ୍ L ରେଖା ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ। (ଅନୁଶୀଳନୀ 7(a)ର ପ୍ରଶ୍ନ 29ଦେଖ)। ସୁତରାଂ କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଅଟନ୍ତି।



[ଚିତ୍ର 8.2]

ଉପପାଦ୍ୟ - 14

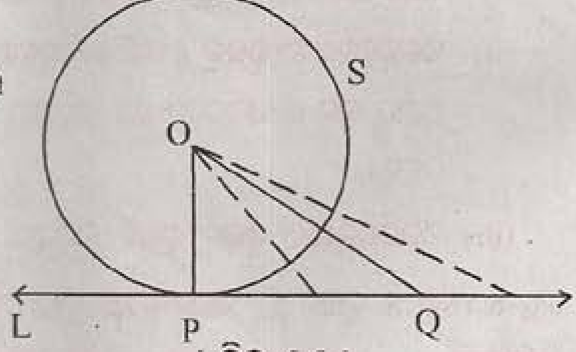
ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଏହାର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟେ।

[A tangent to a circle is perpendicular to the radius through the point of contact.]

ଦତ୍ତ : L ସରଳରେଖା S ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ। O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ P ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{OP} \perp L$

ପ୍ରମାଣ : Q, L ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ P ଭିନ୍ନ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ। ଯେହେତୁ Q ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ, OQ > OP = ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ। କିନ୍ତୁ Q, L ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ। ସୁତରାଂ O ଠାରୁ L ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ସମସ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ $\overline{OP}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ। ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ସରଳରେଖାର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସରଳରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଉଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ। $\therefore \overline{OP} \perp L$ (ପ୍ରମାଣିତ)



[ଚିତ୍ର 8.3]

ଉପପାଦ୍ୟ - 15

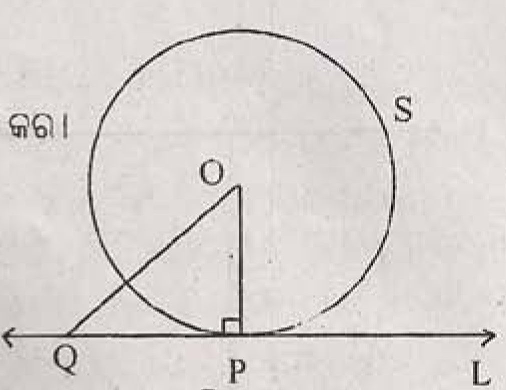
(ଉପପାଦ୍ୟ-14ର ବିପରୀତ)

ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଟେ।

[The perpendicular drawn at a point of a circle to the radius through that point is a tangent to the circle.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ P ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ।

P ଠାରେ L ସରଳରେଖା $\overline{OP}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ।



[ଚିତ୍ର 8.4]

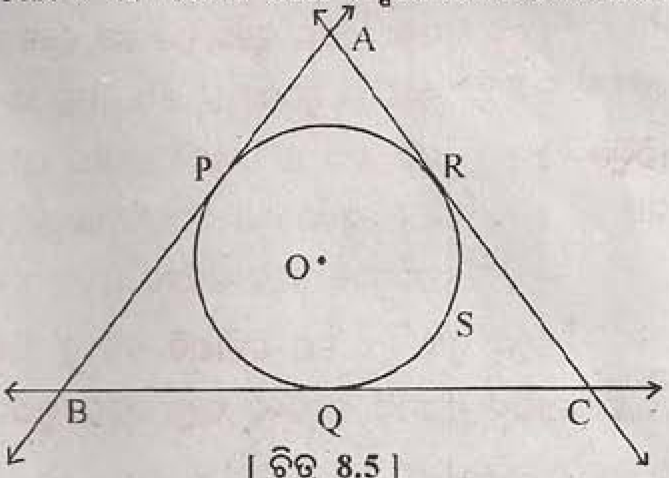
ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : L ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ।

ଅଙ୍କନ : Q, L ଉପରିସ୍ଥ P ଭିନ୍ନ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\overline{OQ}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ΔOPQରେ $\angle OPQ$ ଏକ ସମକୋଣ
(ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $L \perp \overline{OP}$)
ଯେହେତୁ $\overline{OQ}$ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଏବଂ $\overline{OP}$ ଏକ ବାହୁ
ତେଣୁ $OQ > OP$ (= ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)
ଅର୍ଥାତ୍ Q, L ଉପରିସ୍ଥ P ଭିନ୍ନ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଏହା ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ହେବ ।
$\Rightarrow$ P ବିନ୍ଦୁଟି S ବୃତ୍ତ ଓ L ସରଳରେଖାର ଏକମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ।
$\Rightarrow$ L ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ବୃତ୍ତର ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଠାରେ ସ୍ପର୍ଶକ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରବିନ୍ଦୁଗାମୀ ହେବ ।



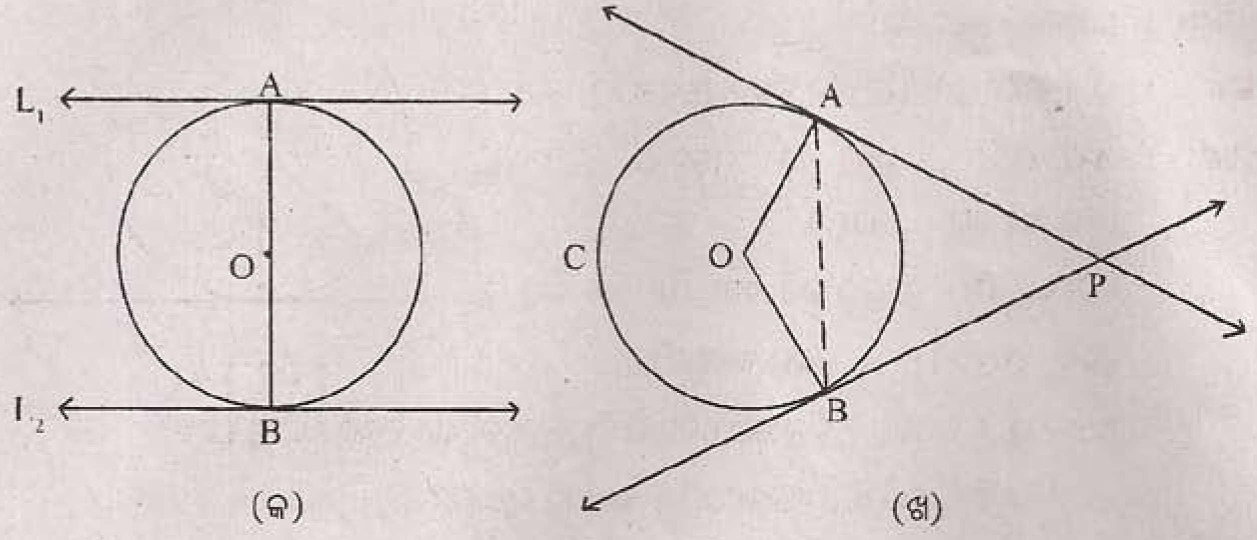
[ଚିତ୍ର 8.5]

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଚିତ୍ର ୮.୫ରେ S ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଏପରି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ P, Q ଓ R ନିଆଯାଉ, ଯେପରିକି ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କଠାରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକତ୍ରୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ । ଛେଦବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ହେଉ । P, Q ଓ R ବିନ୍ଦୁ ତିନୋଟିର ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥାନ ନେଇ ଏପରି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ତ୍ରିଭୁଜ ରହିଅଛି ।

ଅନ୍ୟପକ୍ଷରେ ଯେକୌଣସି ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ଦତ୍ତ ଥିଲେ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ PQR ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ । ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ବୃତ୍ତ ବା ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ **(incircle)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର 'O'କୁ ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର **(incentre)** କୁହାଯାଏ । P, Q ଏବଂ R ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ହୋଇଥିବାରୁ $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ ଓ $\overline{OR}$ ଯଥାକ୍ରମେ ବାହୁ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟନ୍ତି । ଏହା ମଧ୍ୟ ସହଜରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରିବ ଯେ $\angle A$, $\angle B$ ଓ $\angle C$ରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକମାନେ O ଠାରେ ମିଳିତ ହେବେ ।

8.2. ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ :

କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ଠାରେ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ L_1 ଓ L_2 ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।



[ଚିତ୍ର 8.6]

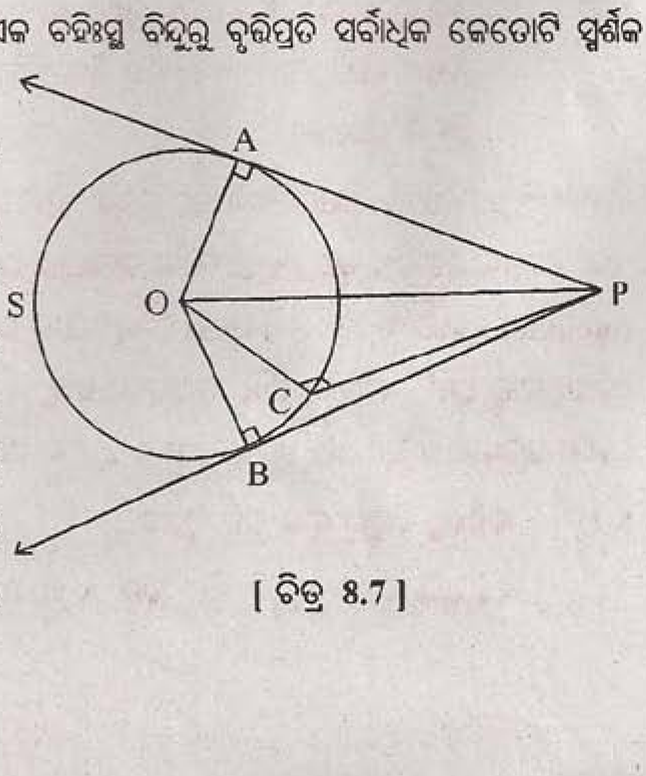
ପରିସ୍ଥିତି - 1 : ଯଦି O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହୁଏ ଏବଂ A ଓ B ଏକ ବ୍ୟାସର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଉଭୟ ସ୍ପର୍ଶକ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବ (ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-2) ଏବଂ L_1 ଓ L_2 ସ୍ପର୍ଶକଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ହେବେ। ସୁତରାଂ L_1 ଓ L_2 ପରସ୍ପର ଛେଦ କରିବେ ନାହିଁ [ଚିତ୍ର 8.6(କ)]।

ପରିସ୍ଥିତି - 2 : ଯଦି A ଓ B କୌଣସି ବ୍ୟାସର ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ନ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ A ଓ Bଠାରେ ଅଙ୍କିତ L_1 ଓ L_2 ସ୍ପର୍ଶକ ଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ହେବେ ନାହିଁ (କାହିଁକି ?) ଏବଂ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ [(ଚିତ୍ର 8.6(ଖ)]।

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହୁଏ ଯେ **କୌଣସି ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଦୁଇଟି ରଶ୍ମି $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ଯେପରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ରଶ୍ମୀ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ ହେବେ।** ଏହାର ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ ଆମେ ଅନ୍ୟତ୍ର ଆଲୋଚନା କରିବା।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠେ ଯେ କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତପ୍ରତି ସର୍ବାଧିକ କେତୋଟି ସ୍ପର୍ଶକ ରହିଅଛି ?

O କେନ୍ଦ୍ରଥିବା S ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କିତ ହୋଇଅଛି, ଯାହାର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B। ମନେକର ତୃତୀୟ ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ $\overrightarrow{PC}$ ରହିଅଛି, ଯାହାର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ C (ଚିତ୍ର 8.7)। C ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ହୋଇଥିବା ଯୋଗୁଁ $\overline{OC} \perp \overrightarrow{PC}$ । ଉପପାଦ୍ୟ-13 ଅନୁଯାୟୀ OAPB ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ। ଯଦି B ଓ C $\overline{OP}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ହୁଅନ୍ତି ଉପପାଦ୍ୟ-13 ଅନୁଯାୟୀ (କିମ୍ବା ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ହେଲେ



[ଚିତ୍ର 8.7]

ଉପପାଦ୍ୟ-11 ଅନୁଯାୟୀ) OAPC ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ। କିନ୍ତୁ O, A ଏବଂ P ମଧ୍ୟଦେଇ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବୃତ୍ତ ସମ୍ଭବ। ସୁତରାଂ OAPC ଏବଂ OAPB ଚତୁର୍ଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୋଇଛନ୍ତି। ଅର୍ଥାତ୍ O, A, P, B ଏବଂ C ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଅଟନ୍ତି। ମାତ୍ର ଏହା ଅସମ୍ଭବ କାରଣ P ବିନ୍ଦୁ A, B ଓ C ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ।

ସୁତରାଂ ତୃତୀୟ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PC}$ ଅସମ୍ଭବ। ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଜାଣିଲେ :

କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ଏବଂ କେବଳ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ରହିଅଛି।

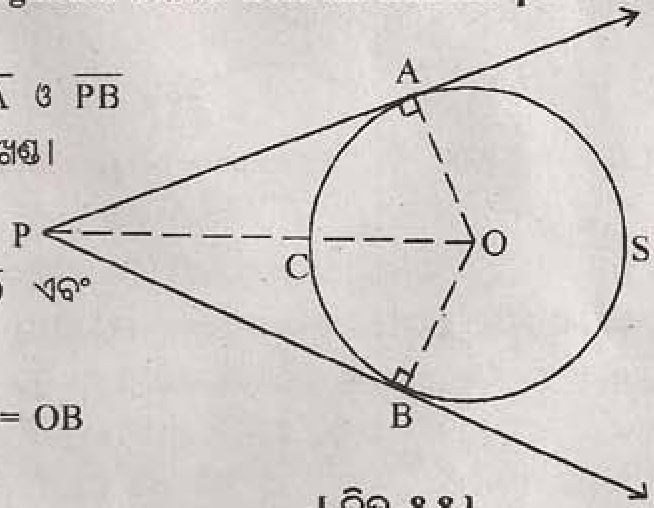
ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତକୁ A ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ $\overline{PA}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ **ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ (tangent-segment)** କୁହାଯାଏ।

ଚିତ୍ର 8.7ରେ $\overline{PA}$ ଓ $\overline{PB}$ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 16

କୌଣସି ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ।

[The lengths of the two tangent segments drawn from an external point to a circle are equal.]



[ଚିତ୍ର 8.8]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତର P ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $\overline{PA}$ ଓ $\overline{PB}$ P ଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : PA = PB

ଅଙ୍କନ : O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ, $\overline{PO}$, $\overline{AO}$ ଏବଂ $\overline{BO}$ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : ΔOAP ଏବଂ ΔOBP ମଧ୍ୟରେ OA = OB (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$\overline{PO}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ।

$m\angle OAP = m\angle OBP = 90^\circ$ (ଉପପାଦ୍ୟ-14)

ସୁତରାଂ $\Delta OAP \cong \Delta OBP$ (ସମକୋଣ-କର୍ଣ୍ଣ-ବାହୁ)

$\Rightarrow PA = PB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟ $\overline{PA}$ ଏବଂ $\overline{PB}$ ହେଲେ ଏବଂ O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ $\overline{PO}$, $\angle APB$ ଏବଂ $\angle AOB$ ଉଭୟକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ।

ଚିତ୍ର 8.8 ରେ $\overline{PO}$ ବୃତ୍ତକୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରୁଛି। $m\angle AOC = m\angle BOC$ ହେତୁ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BC}$ ଜ୍ୟାଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ। ଅର୍ଥାତ୍ C ବିନ୍ଦୁ $\widehat{ACB}$ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PA}$ ଏବଂ $\overline{PB}$ ହେଲେ ଏବଂ O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ $\overline{PO}$, $\overline{AB}$ ଚାପକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ।

ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁରୁ **ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :** ବିଶ୍ଳେଷଣ ଚିତ୍ର 8.9ରେ S ଏକ ବୃତ୍ତ ଓ P ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ। ଯଦି $\overline{PA}$, S ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ହୁଏ ତେବେ $m\angle PAO = 90°$। ତେଣୁ A ବିନ୍ଦୁ, $\overline{PO}$ କୁ ବ୍ୟାସ ରୂପେ ନେଇ ଅଙ୍କିତ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହେବ। ସେହିପରି B ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ବିପରୀତ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହେବ।

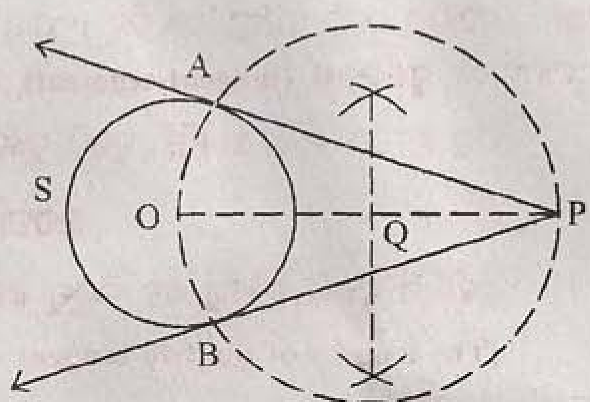
ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ

(i) $\overline{PO}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର।

(ii) $\overline{PO}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ Q ହେଉ।

(iii) Qକୁ କେନ୍ଦ୍ର ନେଇ ଏବଂ PQ କିମ୍ବା QOକୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରୁ।

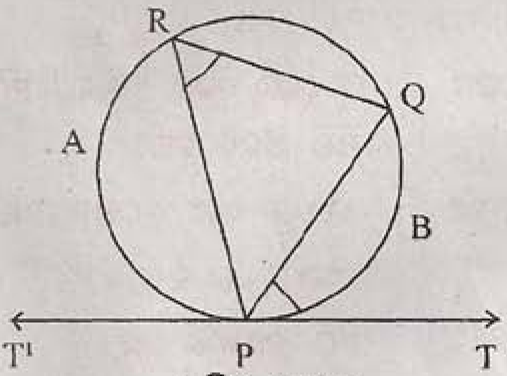
(iv) $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ ଅଙ୍କନ କର। ବର୍ତ୍ତମାନ $\overline{PA}$ ଓ $\overline{PB}$ S ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ।



[ଚିତ୍ର 8.9]

8.3. ଏକାନ୍ତର ଚାପ (alternate arc), ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ (alternate segment) :

$\overleftrightarrow{PT}$, P ବିନ୍ଦୁରେ PAB ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ (ଚିତ୍ର 8.10)। Q ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\overline{PQ}$ ଜ୍ୟାକୁ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା କୁହାଯାଏ। $\overline{PQ}$ ଜ୍ୟାର ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ T ଅବସ୍ଥିତ ତାହାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଚାପକୁ $\overset{\frown}{PAQ}$କୁ $\angle QPT$ର ଏକାନ୍ତର ଚାପ କୁହାଯାଏ। ସେହିପରି ଚିତ୍ର 8.10ରେ $\overset{\frown}{PBQ}$, $\angle QPT$ ର ଏକାନ୍ତର ଚାପ। PAQP ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡକୁ (ଚିତ୍ର 7.7 ଦେଖ) $\angle QPT$ର **ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ (alternate segment)** କୁହାଯାଏ। R, $\angle QPT$ ର ଏକାନ୍ତର ଚାପ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle QRP$ କୁ $\angle QPT$ର ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ବା ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ କୁହାଯାଏ।

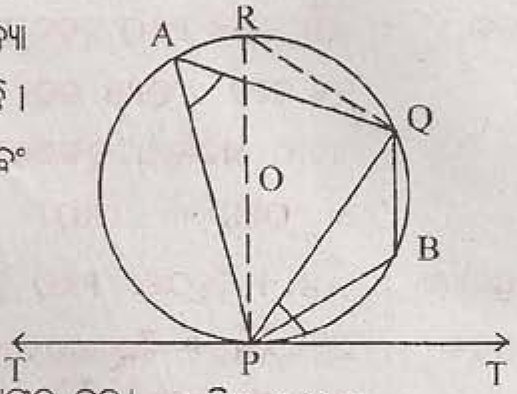


[ଚିତ୍ର 8.10]

ଉପପାଦ୍ୟ - 17

ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ କୌଣସି ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ସହିତ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ ତା'ର ପରିମାଣ ଉକ୍ତ କୋଣର ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ସହ ସମାନ।

[The measure of an angle formed by a tangent to a circle and a chord through the point of contact equals the measure of an angle inscribed in the alternate segment.]



[ଚିତ୍ର 8.11]

ଦତ୍ତ : PAQ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{T'T}$ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ $\overline{PQ}$ ଜ୍ୟା ସହିତ $\angle TPQ$ ଏବଂ $\angle T'PQ$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଛି । $\angle PAQ$ ଏବଂ $\angle PBQ$ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle TPQ$ ଏବଂ $\angle T'PQ$ର ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ଅଟନ୍ତି ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : (i) $m\angle TPQ = m\angle PAQ$

(ii) $m\angle T'PQ = m\angle PBQ$

ଅଙ୍କନ : O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଉ । $\overline{PR}$ ବ୍ୟାସ ଓ $\overline{QR}$ ଜ୍ୟା ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : $\overline{PQ}$ ଏକ ବ୍ୟାସ ହେଲେ $\overline{PQ}$, P ଠାରେ $\overleftrightarrow{T'T}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବ ଏବଂ $\angle PAQ$ ଓ $\angle PBQ$ ଉଭୟେ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ହେବ । ସୁତରାଂ ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ପ୍ରମାଣିତ । $\overline{PQ}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା ହେଉ ଏବଂ $\widehat{PAQ}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ ହେଉ । ∴ O ଏବଂ A $\overline{PQ}$ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

⇒ A ଏବଂ R $\overline{PQ}$ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

⇒ $\angle PAQ$ ଏବଂ $\angle PRQ$, $\widehat{PAQ}$ର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଦୁଇଟି କୋଣ ।

⇒ $m\angle PAQ = m\angle PRQ$ ....(1)

$\overline{PR}$ ବ୍ୟାସ ହେତୁ P ଠାରେ $\overleftrightarrow{T'T}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

⇒ $m\angle RPT = 90^0 = m\angle RPQ + m\angle QPT$ ....(2)

ΔPQRରେ $m\angle PQR = 90^0$ (ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ)

⇒ $m\angle PRQ + m\angle RPQ = 90^0$ (ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି = 180^0)

⇒ $m\angle RPQ + m\angle QPT = m\angle PRQ + m\angle RPQ$ [(2) ଦ୍ୱାରା]

⇒ $m\angle QPT = m\angle PRQ$

⇒ $m\angle QPT = m\angle PAQ$ [(1) ଦ୍ୱାରା] ......(3) [(i) ପ୍ରମାଣିତ]

ବର୍ତ୍ତମାନ $m\angle T'PQ + m\angle QPT = 180^0$ (ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ)

ଏବଂ $m\angle PAQ + m\angle PBQ = 180^0$ (∵ PAQB ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ)

ସୁତରାଂ $m\angle T'PQ + m\angle QPT = m\angle PAQ + m\angle PBQ$

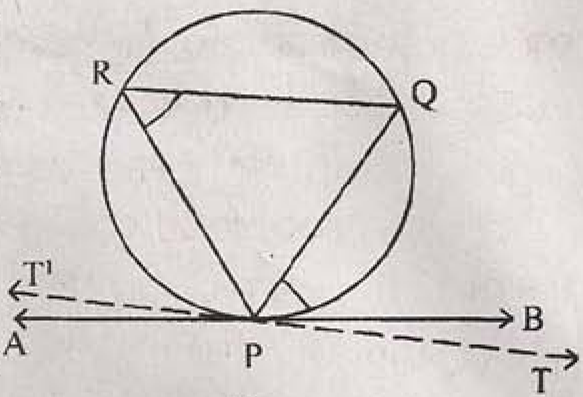
$m\angle T'PQ = m\angle PBQ$ [(3) ଦ୍ୱାରା] [(ii) ପ୍ରମାଣିତ]

ଉପପାଦ୍ୟ - 18

ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟାର ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଠାରେ ଏକ ସରଳରେଖା ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା ଏକ କୋଣର ପରିମାଣ ସହ ଉକ୍ତ କୋଣର ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହେଲେ ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ହେବ ।

[If the measure of an angle formed by a straight line through an end point of a chord of a circle is equal to the measure of an angle inscribed in the alternate segment then the straight line is a tangent to the circle.]

ଦତ୍ତ : $\overleftrightarrow{AB}$ ରେଖା PRQ ବୃତ୍ତର P ବିନ୍ଦୁଠାରେ $\overline{PQ}$ ଜ୍ୟା ସହିତ ∠QPB ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଛି। ∠PRQ ଏହାର ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ ଏକ କୋଣ। m∠QPB= m∠PRQ।



[ଚିତ୍ର 8.12]

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overleftrightarrow{AB}$, P ବିନ୍ଦୁଠାରେ PRQ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ।

ଅଙ୍କନ : ଯଦି $\overleftrightarrow{AB}$, P ବିନ୍ଦୁଠାରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ନ ହୁଏ, ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ $\overleftrightarrow{T'T}$ ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ହେଉ।

⇒ m∠QPT = m∠PRQ (ଉପପାଦ୍ୟ-17)

କିନ୍ତୁ m∠QPB = m∠PRQ (ଦତ୍ତ) ⇒ m∠QPT = m∠QPB

ଯେହେତୁ B ଓ T, $\overline{PQ}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ, କୋଣ ଅଙ୍କନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ $\overrightarrow{PT}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟ ଅଭିନ୍ନ। ଅର୍ଥାତ୍ $\overleftrightarrow{T'T}$ ଓ $\overleftrightarrow{AB}$ ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ଅଭିନ୍ନ।

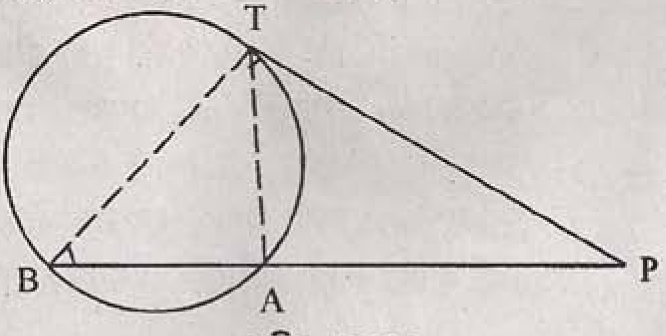
⇒ $\overleftrightarrow{AB}$ P ବିନ୍ଦୁଠାରେ PRQ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ। (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 19

କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ ଏବଂ $\overline{PT}$ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ହେଲେ **PA · PB = PT²।**

[If a secant to a circle passing through an external point P meets the circle at A and B and $\overline{PT}$ is a tangent segment, then PA · PB = PT².]

ଦତ୍ତ : TBA ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ। $\overline{PT}$ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ।



[ଚିତ୍ର 8.13]

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $PA \,.\, PB = PT^2$

ଅଙ୍କନ : $\overline{TA}$, $\overline{TB}$ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର P-A-B। ΔPTA ଏବଂ ΔPTB ମଧ୍ୟରେ m∠PTA = m∠TBA (ଉପପାଦ୍ୟ-17)

∠TPA ସାଧାରଣ କୋଣ ⇒ m∠PAT = m∠BTP (ଅବଶିଷ୍ଟ କୋଣ)

ସୁତରାଂ ΔPTA ~ ΔPTB

$$\Rightarrow \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PT^2$$

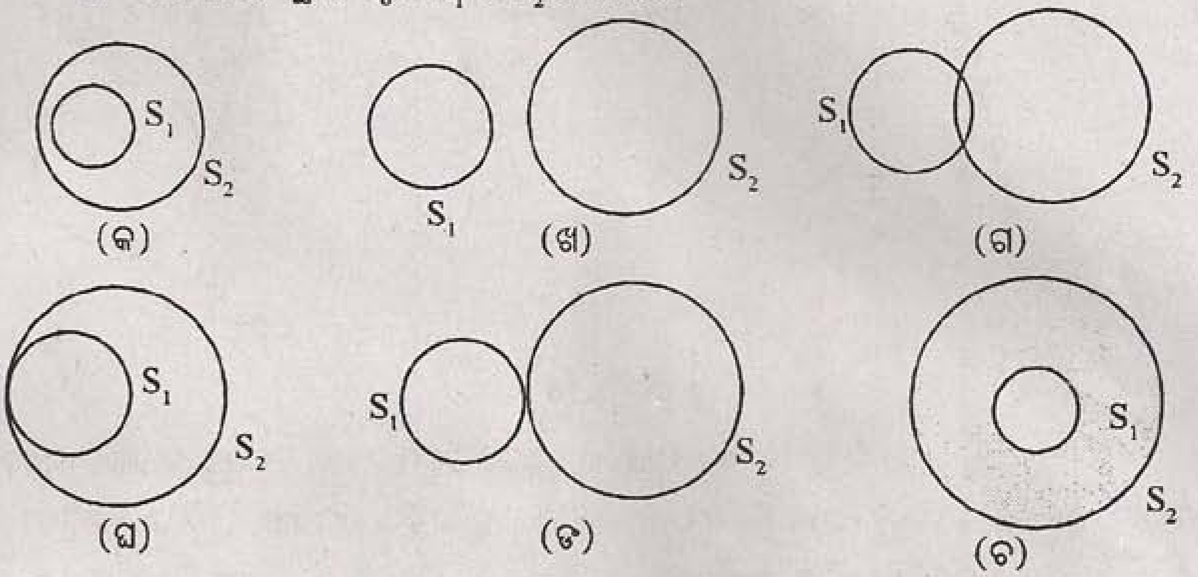
ଯଦି P-B-A ତେବେ ପ୍ରମାଣ ଅନୁରୂପ ହେବ। (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ $PA \cdot PB = PC \cdot PD$।

(ଉପରୋକ୍ତ ସମାନତାର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱ, P ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଏକ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗ ସହିତ ସମାନ।)

8.4. ଏକାଧିକ ବୃତ୍ତ ସମ୍ପର୍କୀୟ ଆଲୋଚନା :

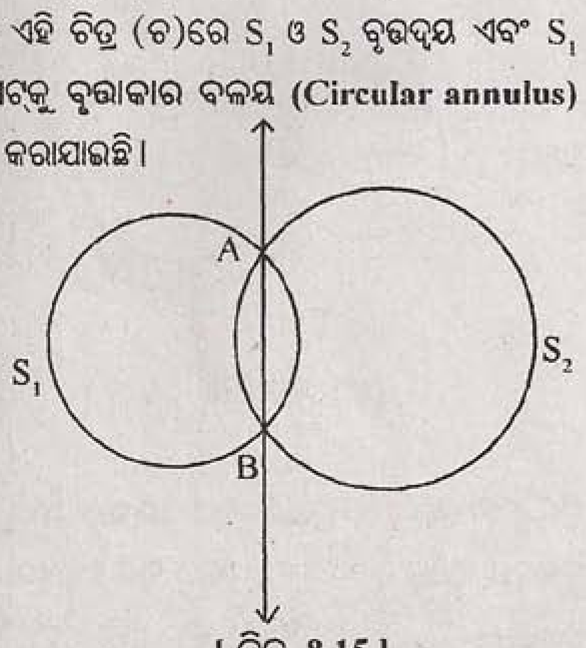
ଏକ ସମତଳରେ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ନିଆଯାଉ।



[ଚିତ୍ର 8.14]

ବୃତ୍ତ ଦୁଇଟିର କେନ୍ଦ୍ରର ଅବସ୍ଥିତି ନେଇ ବିଭିନ୍ନ ଚିତ୍ର ଦିଆଯାଇଛି। ଚିତ୍ର (କ) ଓ (ଖ)ରେ S_1 ଓ S_2 ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତ। ଚିତ୍ର (ଗ)ରେ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପରକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ ଚିତ୍ର (ଘ) ଓ (ଙ)ରେ ପରସ୍ପରକୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି। ଚିତ୍ର (ଚ)ରେ ଉଭୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅଭିନ୍ନ କିନ୍ତୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଭିନ୍ନ। ଏହି ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ ଏକ-କେନ୍ଦ୍ରିକ (concentric) ବୃତ୍ତ କୁହାଯାଏ। ଏହି ଚିତ୍ର (ଚ)ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ଏବଂ S_1 ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଥିବା S_2 ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ ବୃତ୍ତାକାର ବଳୟ **(Circular annulus)** କୁହାଯାଏ। ଚିତ୍ର (ଚ)ରେ ବଳୟକୁ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଇଛି।

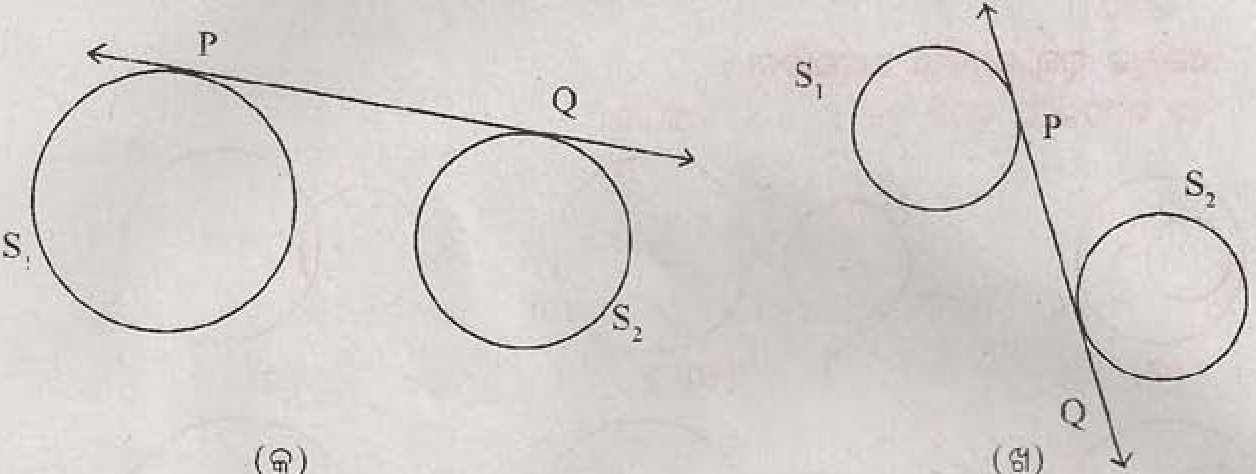
ଚିତ୍ର 8.15ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି। $\overleftrightarrow{AB}$ ସରଳରେଖାକୁ ଏହି ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ରାଡ଼ିକାଲ୍ **ଅକ୍ଷ (radical axis)** କୁହାଯାଏ। ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ ନକଲେ ମଧ୍ୟ ସେମାନଙ୍କର ରାଡ଼ିକାଲ୍ ଅକ୍ଷ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ହୋଇଅଛି। ଯାହାର ଅଧ୍ୟୟନ ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀରେ ହେବ। ରାଡ଼ିକାଲ୍ ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ (ଅନୁଶୀଳନୀ-8ର ପ୍ରଶ୍ନ-୨ ଦେଖ)।



[ଚିତ୍ର 8.15]

8.5. ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ (Common tangents and tangent-circles) :

ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତକୁ ସେହି ସମତଳରେ ଥିବା ଯେଉଁ ସରଳରେଖା ସ୍ପର୍ଶକରେ ତାହାକୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ଏକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ **(common tangent)** କୁହାଯାଏ।

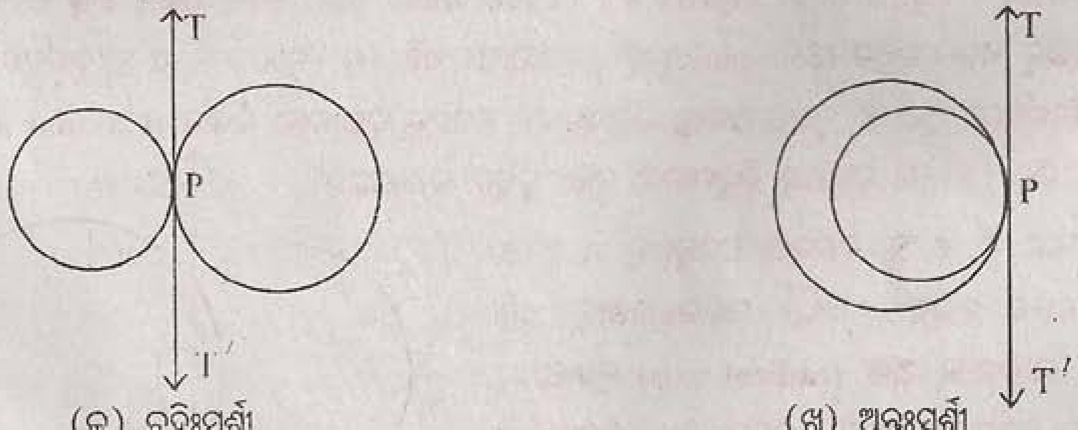


(କ) (ଖ)

[ଚିତ୍ର 8.16]

ଚିତ୍ର 8.16 ରେ $\overleftrightarrow{PQ}$, S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ଏକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ। ଚିତ୍ର (କ)ରେ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକଟିର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବାବେଳେ ଚିତ୍ର (ଖ)ରେ ସେମାନେ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକଟିର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ। ଚିତ୍ର (କ)ରେ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏକ **ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (common direct tangent)** ଏବଂ ଚିତ୍ର (ଖ)ରେ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏକ **ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (common transverse tangent)** ଅଟେ।

ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ଏକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଉଭୟ ବୃତ୍ତକୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତ (Tangent-circles) କୁହାଯାଏ।



(କ) ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ (ଖ) ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ

[ଚିତ୍ର 8.17]

ଚିତ୍ର 8.17 ରେ $\overleftrightarrow{TT'}$ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ଏକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି। ଏଠାରେ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ବା ପରସ୍ପରକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା ବୃତ୍ତ ଅଟନ୍ତି। ଚିତ୍ର (କ)ରେ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ (externally tangent-circles) ଓ ଚିତ୍ର (ଖ)ରେ ସେମାନେ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ (internally tangent-circles) ଅଟନ୍ତି।

ପ୍ରଶ୍ନ : ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟର ବିଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥିତି ପାଇଁ ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। (ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକର ସଂଖ୍ୟା 0, 1, 2, 3 ଓ ସର୍ବାଧିକ 4 ହୋଇପାରେ।)

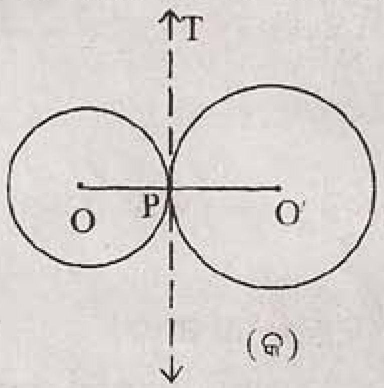
ଉପପାଦ୍ୟ - 20

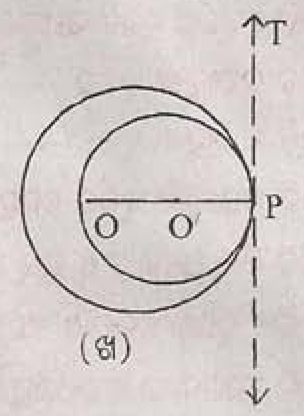
ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟ ଓ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ।

(The two centres and the point of contact of two tangent-circles are collinear.)

ଦତ୍ତ : ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ O'। P ସେମାନଙ୍କର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : O, O' ଏବଂ P ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ।





[ଚିତ୍ର 8.18]

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ ବୃତ୍ତ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ, ସେମାନଙ୍କର ଏକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ରହିଅଛି। $\overleftrightarrow{PT}$ ସେହି ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ହେଉ।

$\overleftrightarrow{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକ, ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଦ୍ୱୟ $\overline{OP}$ ଏବଂ $\overline{O'P}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ (ଉପପାଦ୍ୟ-14)। କିନ୍ତୁ $\overleftrightarrow{PT}$ ସରଳରେଖାର P ଠାରେ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ। ସୁତରାଂ $\overleftrightarrow{OP}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{O'P}$ ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ଅଭିନ୍ନ। ଅର୍ଥାତ୍ O, O' ଏବଂ P ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ। (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ ବହିଃସ୍ପର୍ଶ କଲେ ସେମାନଙ୍କର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ଉକ୍ତ କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଦୂରତା ସହ ସମାନ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶ କଲେ ସେମାନଙ୍କର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଦୂରତା ସହ ସମାନ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 8

'କ' - ବିଭାଗ

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର।

(i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 6 ସେ.ମି.। ଏହାର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 10 ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଥିବା ଏକ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ——— ସେ.ମି.।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ 10 ସେ.ମି.। ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ବୃତ୍ତପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ସେ.ମି. ହେଲେ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ବିନ୍ଦୁଟିର ଦୂରତା ——— ସେ.ମି.।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\widehat{AXB}$ ର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 130^0 । A ଓ B ଠାରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଦ୍ୱୟ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । $m\angle APB$ = ——— ।

(iv) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବାଧିକ ——— ଟି ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ରହିପାରିବ ।

(v) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଅଙ୍କିତ ଏକ ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଯେପରି P-A-B । $\overrightarrow{PT}$ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ । PA = 12 ସେ.ମି., PB = 27 ସେ.ମି. ହେଲେ PT = ——— ସେ.ମି. ।

(vi) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ΔABCରେ AB = AC । A ଠାରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି B ଓ P, $\overline{AC}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । $m\angle PAC=70^0$ ହେଲେ $m\angle BAC$ = ——— ।

(vii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 12 ସେ.ମି. ହେଲେ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ———ସେ.ମି. ।

(viii) ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର ——— ଟି ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଛି ।

(ix) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର ——— ଟି ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଛି ।

(x) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ——— ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।

2. ଉକ୍ତିଟି ଠିକ୍ ଥିଲେ T ଓ ଭୁଲ୍ ଥିଲେ F ଲେଖ ।

(i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ଏହାର ଏକ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହ ସମାନ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଏହାକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା ଅସଂଖ୍ୟ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ ।

(iii) 6 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ଯେଉଁଠାରୁ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 8 ସେ.ମି. ଲେଖାଏଁ ହେବ ।

(iv) ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ସେମାନଙ୍କ କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

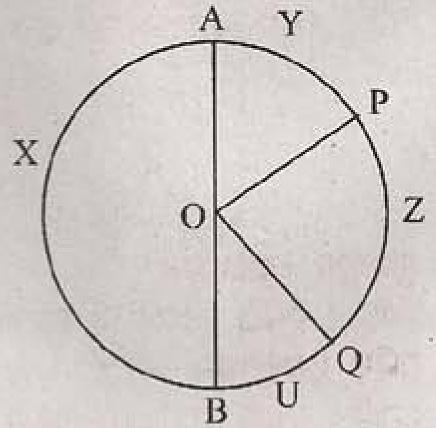
(v) $\angle APB$ର $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟ ସର୍ବାଧିକ ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ହେବ ।

(vi) ΔABCର $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ ଓ $\overleftrightarrow{CA}$ ସରଳରେଖାତ୍ରୟକୁ ଏକକାଳୀନ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା ଚାରୋଟି ବୃତ୍ତ ଅଛି ।

(vii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅନ୍ୟ ଏକ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଥିଲେ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ଏକମାତ୍ର ସ୍ପର୍ଶକ ରହିବ ।

(viii) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ସେମାନଙ୍କର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟିଠାରୁ କମ୍ ହେଲେ ବୃତ୍ତ ଦୁଇଟି ସର୍ବଦା ପରସ୍ପରକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ ।

3. ଚିତ୍ର 8.19ରେ X, A, Y, P, Z, Q, U, B ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର । $m\widehat{AYP}=60^0$ ଏବଂ $m\widehat{BUQ}=30^0$ । A, P, Q ଓ Bକୁ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ନେଇ ଚାପଗୁଡ଼ିକର ତାଲିକା କର । ତନ୍ମଧ୍ୟରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଓ ବୃହତ୍‌ଚାପଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନଟ କରି ଉକ୍ତ ଚାପଗୁଡ଼ିକର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



[ଚିତ୍ର 8.19]

'ଖ' – ବିଭାଗ

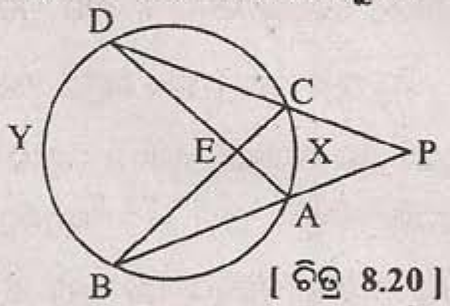
4. ଚିତ୍ର 8.20ରେ ABC ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ C, D ଓ A, B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି। ଯେପରି P-A-B ଏବଂ P-C-D। $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ E।

(i) ପ୍ରମାଣ କର $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

(ii) ପ୍ରମାଣ କର $\Delta PCB \sim \Delta PAD$

(iii) ପ୍ରମାଣ କର $\Delta CED \sim \Delta AEB$

(iv) ପ୍ରମାଣ କର $\frac{AC}{BD} = \frac{EC}{ED}$



[ଚିତ୍ର 8.20]

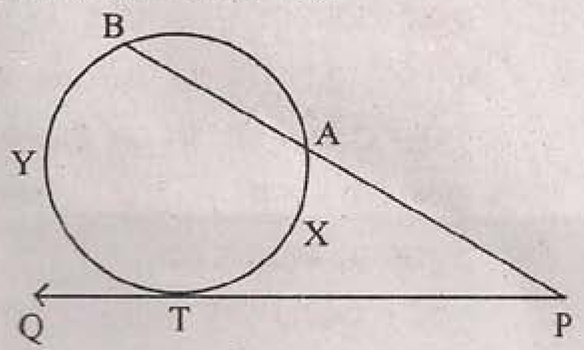
(v) PA = 10 ସେ.ମି., PB = 16 ସେ.ମି. ଓ PD = 20 ସେ.ମି., ହେଲେ CD ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(vi) PA = 10 ସେ.ମି. ଓ AB = 6 ସେ.ମି. ହେଲେ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(vii) $m\widehat{AXC} = 30^0$ ଏବଂ $m\widehat{BYD} = 140^0$ ହେଲେ $m\angle APC$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

5. ଚିତ୍ର 8.21ରେ AXY ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ। $\overrightarrow{PQ}$ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ T ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ।

(i) $m\widehat{AXT} = 70^0$ ଏବଂ $m\widehat{BYT} = 150^0$ ହେଲେ $\angle ATP$, $\angle APT$, $\angle ATB$ ଓ $\angle BTQ$ ଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।



[ଚିତ୍ର 8.21]

(ii) $m\angle BTQ = 2\, m\angle ATP$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, BT = TP।

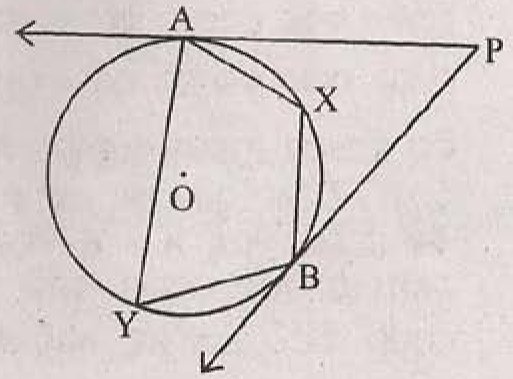
(iii) PA = 8 ସେ.ମି. PT = 12 ସେ.ମି. ହେଲେ AB ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(iv) PT = 2AP ଏବଂ AB = 18 ସେ.ମି. ହେଲେ PT ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(v) PT = 2AP ଏବଂ PB = 24 ସେ.ମି. ହେଲେ PT ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

6. ଚିତ୍ର 8.22ରେ $\overline{PA}$ ଓ $\overline{PB}$ ଏକ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ। $\overline{AB}$ର P ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚାପ ଉପରେ X ଓ ଏହାର ବିପରୀତ ଚାପ ଉପରେ Y ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ। $m\angle APB = 58^0$ ହେଲେ $m\angle AXB$ ଏବଂ $m\angle AYB$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

[ସୂଚନା : $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ଅଙ୍କନ କର $\overline{OA} \perp \overline{AP}$ ଏବଂ $\overline{OB} \perp \overline{BP}$]



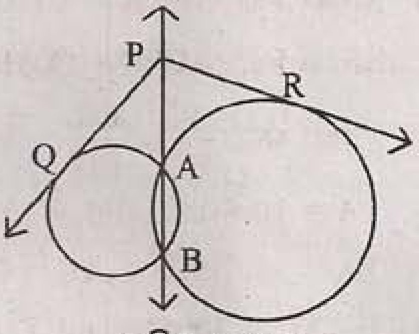
[ଚିତ୍ର 8.22]

7. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ P ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ। $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔOPQ ଏବଂ ΔOPR ସର୍ବସମ ଅଟନ୍ତି।

8. ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ଅଥବା ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ।

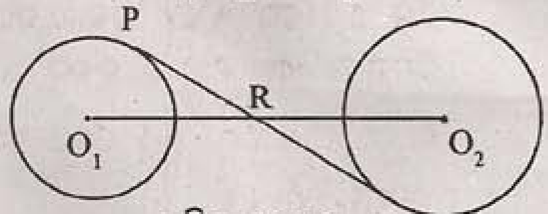
ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବୃତ୍ତ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବା ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ହେଲେ ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ ସତ୍ୟ ହେବ କି?

9. ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର 8.23)। $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି $\overrightarrow{PQ}$ ଓ $\overrightarrow{PR}$ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କିତ ହୋଇଅଛି। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $PQ = PR$।



[ଚିତ୍ର 8.23]

10. ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O_1 ଏବଂ O_2(ଚିତ୍ର 8.24)। ଏକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overline{O_1O_2}$ କୁ R ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ R, $\overline{O_1O_2}$ କୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତରେ ବିଭକ୍ତ କରେ।



[ଚିତ୍ର 8.24] Q

11. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overline{QR}$ ସହ ସମାନ୍ତର।

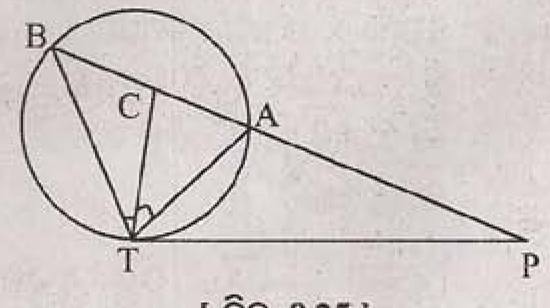
12. ଦୁଇଟି ଏକ-କେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା ଅନ୍ୟ ବୃତ୍ତଟିର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁରେ ଜ୍ୟାଟି ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ।

13. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଏକ ବୃତ୍ତର ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ।

'ଗ' - ବିଭାଗ

14. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ P ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ। $\overline{PT}$ ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ। Q, $\overline{OP}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $QT = QP$।

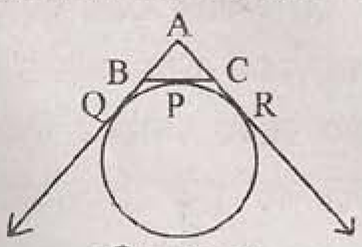
15. ଚିତ୍ର 8.25ରେ P ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ। $\overline{PT}$ ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ। C, $\overline{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $\overline{TC}$, $\angle ATB$କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $PT = PC$।



[ଚିତ୍ର 8.25]

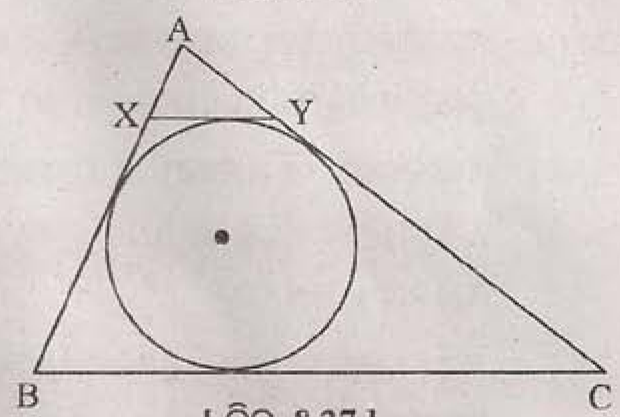
16. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନେ ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AB+CD = AD+BC ।

17. ଚିତ୍ର 8.26 ରେ ΔABCର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବୃତ୍ତ PQR $\overline{BC}$ ବାହୁକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ ଏବଂ $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{AC}$ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ Q ଓ R ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AQ = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$ ।



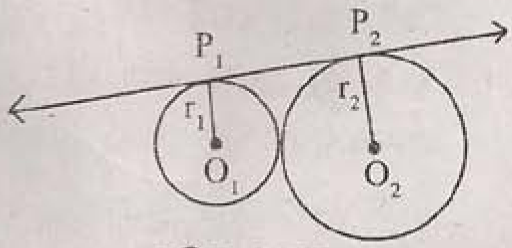
[ଚିତ୍ର 8.26]

18. ଚିତ୍ର 8.27ରେ ΔABCର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବାହୁ ଉପରେ X ଓ Y ଏପରି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେ $\overline{XY}$ ΔABCର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତକୁ ସ୍ପର୍ଶକରେ । (କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା ବୃତ୍ତକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ (incircle) କୁହାଯାଏ । ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରକୁ ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର **(incentre)** କୁହାଯାଏ ।) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AX + XY + YA = AB + AC − BC ।



[ଚିତ୍ର 8.27]

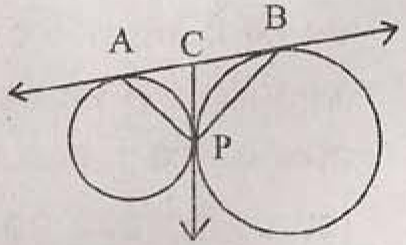
19. ଚିତ୍ର 8.28ରେ O_1 ଏବଂ O_2 କେନ୍ଦ୍ରବିନ୍ଦୁ ଓ r_1, r_2 ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ ଏକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ । P_1 ଓ P_2 ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $P_1P_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$ ।



[ଚିତ୍ର 8.28]

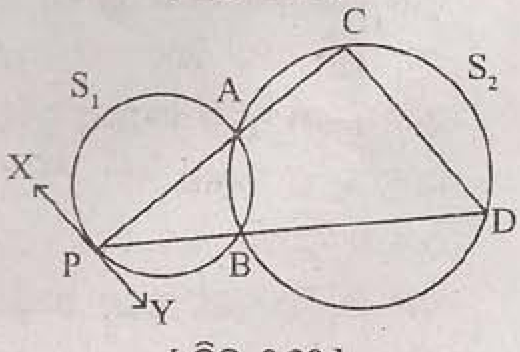
20. ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ P । ଏକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{AB}$ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overline{AB}$କୁ C ଠାରେ ଛେଦ କରେ । (ଚିତ୍ର 8.29) । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

(i) AC = CB, (ii) $m\angle APB = 90^0$ ।



[ଚିତ୍ର 8.29]

21. ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପରକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । P, S_1 ଉପରିସ୍ଥ ଏକବିନ୍ଦୁ । $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$, S_2କୁ ଯଥାକ୍ରମେ C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । (ଚିତ୍ର 8.30) । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ଠାରେ S_1 ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{XY}$, $\overline{CD}$ ସହ ସମାନ୍ତର ।



[ଚିତ୍ର 8.30]

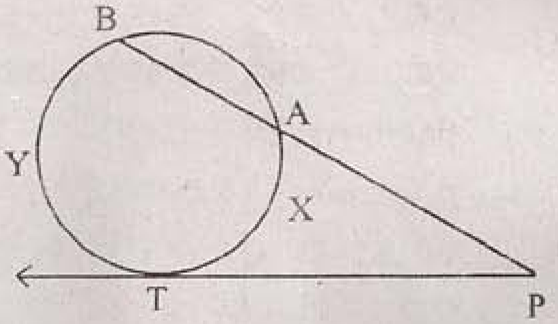
22. P ବିନ୍ଦୁ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ A, B ଓ C, Dରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଯେପରି P-A-B ଏବଂ P-C-D। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ∠APCର ପରିମାଣ, ଉକ୍ତ କୋଣ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପଦ୍ୱୟର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅନ୍ତରର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ଅଟେ।

23. $\overline{PQ}$ ଏବଂ $\overline{PR}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ। $\overline{QR}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ S ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overrightarrow{QS}$, ∠PQRର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ।

24.(i) ଏକ ବୃତ୍ତରେ $\overline{MN}$ ବ୍ୟାସ। M ଠାରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ A ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $\overline{AN}$, ବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $MN^2 = AN \cdot PN$।

(ii) ଏକ ବୃତ୍ତରେ $\overline{MN}$ ବ୍ୟାସ। M ଠାରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ A ଓ B ଏପରି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି A-M-B ଏବଂ $\overline{AN}$ ଓ $\overline{BN}$, ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AN \cdot PN = BN \cdot QN$।

25. $\overline{PT}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଯେପରି P-A-B (ଚିତ୍ର 8.31)। X ଓ Y ∠APT ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle APT = \frac{1}{2}(m\widehat{BYT} - m\widehat{AXT})$।



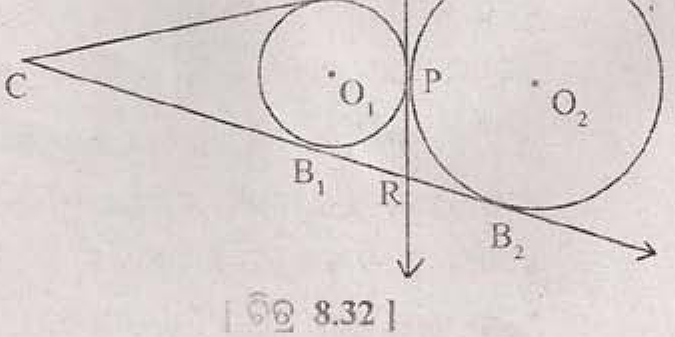
[ଚିତ୍ର 8.31]

26. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ସହ ସମାନ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ∠APBକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ।

27. ΔPQRରେ ∠Q ସମକୋଣ। $\overline{QR}$କୁ ବ୍ୟାସ ନେଇ ଅଙ୍କିତ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ $\overline{PR}$ କୁ T ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ T ଠାରେ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overline{PQ}$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ।

[ସୂଚନା : $\overline{TQ}$ ଅଙ୍କନ କର ଓ QTR ବୃତ୍ତକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର। $\overline{PQ}$, QTR ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ।]

28. ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ $\overleftrightarrow{QR}$ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ। ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ପରସ୍ପରକୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ $\overleftrightarrow{QR}$ କୁ Q ଓ R ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି। O_1 ଏବଂ O_2 ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ଅଟନ୍ତି। (ଚିତ୍ର 8.32)।



[ଚିତ୍ର 8.32]

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ –

(i) CQ = CR

(ii) QP = PR

(iii) C, O_1, P ଓ O_2 ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ।

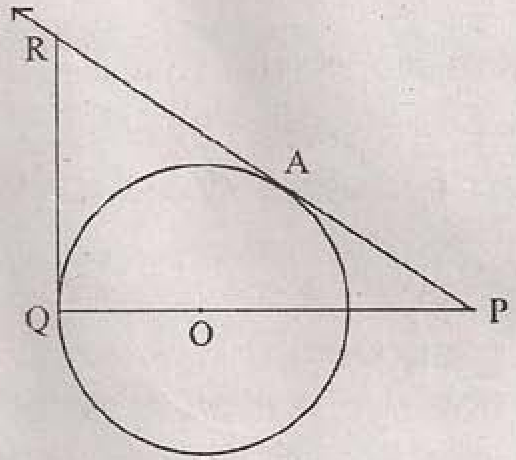
[(i) ର ପ୍ରମାଣ ନିମନ୍ତେ ସୂଚନା : $\overleftrightarrow{CQ}$ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ A_1, A_2 ଏବଂ $\overleftrightarrow{CR}$ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ B_1, B_2 ହେଉ। ଦର୍ଶାଅ ଯେ $A_1A_2 = B_1B_2 \Rightarrow A_1Q = B_1R$।

(iii) ର ପ୍ରମାଣ ନିମନ୍ତେ ସୂଚନା : $\overline{CO_1}$, $\overline{O_1A_1}$, $\overline{O_1B_1}$ ଅଙ୍କନ କର। ଦର୍ଶାଅ ଯେ $m\angle A_1O_1C = m\angle B_1O_1C$ ଏବଂ $m\angle A_1O_1P = m\angle B_1O_1P \Rightarrow m\angle CO_1A_1 + m\angle A_1O_1P = 180^0$]

29. $\overleftrightarrow{PR}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ A ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ। O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର। $\overrightarrow{PO}$ ବୃତ୍ତକୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ଯେପରି P-O-Q। Q ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PR}$ କୁ R ଠାରେ ଛେଦ କରେ। (ଚିତ୍ର 8.33)।

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

PA.AR – PO.OQ = (ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)^2।



[ଚିତ୍ର 8.33]

[ସୂଚନା : ΔOAP ଏବଂ ΔPQR ଦୁଇଟି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ପ୍ରତି ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ।]

30. ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି। ଏକ ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B, C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle APB = m\angle CPD$ ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ P ବିନ୍ଦୁରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ।

●●●